Elementos de Hidrodinámica

Fluidos ideales incompresibles

FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Índice

Elementos de hidrodinámica
fluidos ideales incompresibles

1_ DISCUSIÓN DE CONCEPTOS PREVIOS

¿A qué nos referimos cuando mencionamos Fluido Ideal?

Es un sistema de partículas continuo[1], las partículas están vinculadas entre sí, las interacciones entre ellas se describen mediante un modelo que no lograremos desarrollar en este curso, es suficiente para nuestro alcance saber que un fluido ideal:

1. Se adapta al recipiente que lo contiene.
2. No puede oponer resistencia a ser cortado, es decir que su resistencia transversal al corte es despreciable.
3. Sí, logra resistir en mayor o menor medida a ser comprimido. Para comprimirlo y lograr que una determinada porción de masa de un fluido cambie su volumen se necesita realizar trabajo de compresión.

En este curso trataremos un modelo mecánico aplicado a fluidos ideales incompresibles, entonces.

4. El fluido ideal incompresible además de conservar su masa cuando se considera una porción que es una superficie cerrada, posee la propiedad que su volumen permanece casi inalterado. Aunque se realicen esfuerzos muy intensos para comprimir una porción encerrada por una superficie cerrada de fluido incompresible, el volumen de esa porción no cambia apreciablemente. También se dice que grandes cambios de presión no logran variar su volumen.

Densidad: es la relación entre la masa y el volumen del fluido, es una propiedad intensiva de la materia, esto es que no depende de la masa. Es una magnitud física escalar. La densidad de un fluido incompresible (suponiendo temperatura constante) como consecuencia de lo anteriormente dicho no cambia aunque haya variaciones de presión en el fluido. En sistema internacional de unidades la densidad se mide en kg/m^3.

Presión: es una magnitud física escalar que si bien sus unidades son N/m^2, vamos a interpretar la presión como trabajo o capacidad de trabajo que

[1] En realidad lo suponemos continuo considerando la idea clásica del mundo macroscópico, no vamos a tratar aquí cuestiones de dimensiones moleculares. Cuando tomemos diferenciales de volumen se entenderá que son arbitrariamente pequeños pero que involucran miles de moléculas, teniendo en cuenta que el fluido mantendrá su densidad tal como se percibe en el macromundo.

tiene el sistema por unidad de volumen. Nuestro sistema es un fluido ideal, supongamos una porción muy pequeña de este sistema de partículas, que está en el seno de una masa fluida. (ver figura 1)

En la figura se representa un cubo muy pequeño (infinitesimal) de fluido y se ponen en evidencia las interacciones con el resto del fluido que lo rodea, equivale a hacer un diagrama de cuerpo libre del fluido para un observador inercial.

(Por razones de espacio sobre el dibujo, se han representado las interacciones en las caras cuyas normales son los versores **y ;-y ; z ;-z** solamente. Dejamos para los lectores los dibujos y expresiones de las interacciones de la dirección: **x ; -x**)

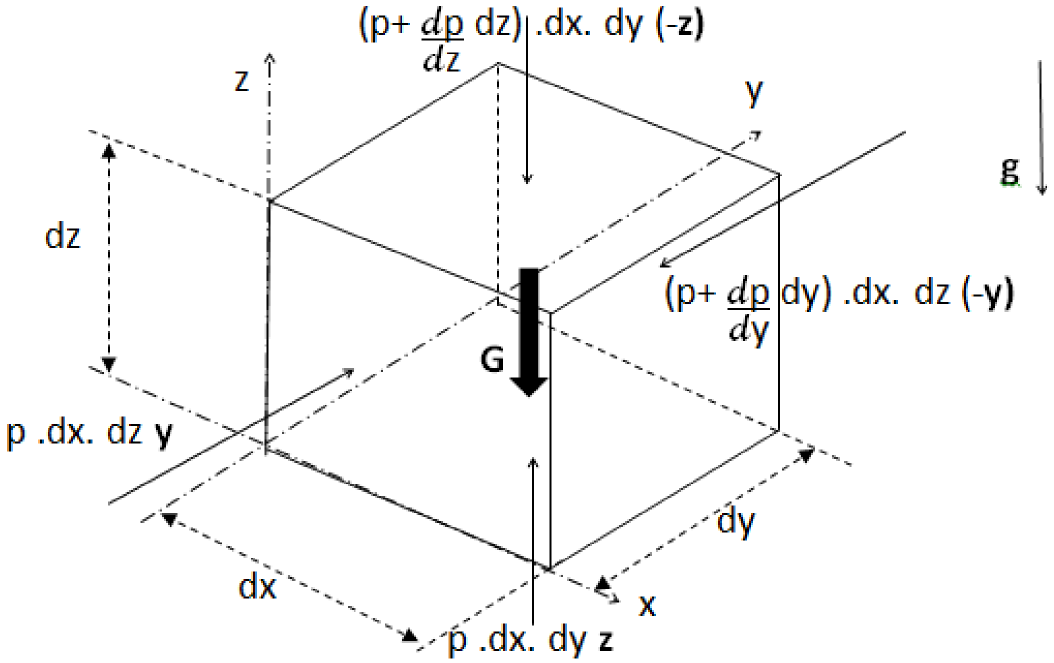

Figura 1

La interacción gravitatoria, es decir el peso, se ha representado con el vector **G:**

$$\bar{G} = -\delta\, g\, dx\, dy\, dx\, \check{z}$$

donde :

$\bar{g} = -g\ \check{z}$ es la aceleración de la gravedad.

$\delta = \frac{dm}{dvol}$ es la densidad

Los vectores fuerza están aplicados a cada cara de este elemento fluido. La dirección de la fuerza es la correspondiente a la normal saliente de cada cara que analizamos y el sentido de la fuerza es opuesto a la normal saliente. Por ejemplo en el plano Y=0 la normal saliente es $-\breve{y}$ por lo tanto la fuerza es $p\ dx\ dz\ \breve{y}$.

También en el plano Y= dy la normal saliente es $+\breve{y}$ por lo tanto la fuerza es[2] $-\left(p+\frac{\partial p}{\partial y}dy\right) dx\ dz\ \breve{y}$.

El módulo de cada fuerza es la presión multiplicada por la superficie de la cara correspondiente.

CASO HIDROSTÁTICO

(a modo de repaso)

Pensamos que el pequeño cubo está en equilibrio es decir sumatoria de fuerzas igual a cero. Lo que nos da para cada componente:

$$\breve{x})\quad p\ dy\ dz - \left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right) dy\ dz = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Análogamente para la componente $\breve{y})$ $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ es decir la presión no cambia si se pasa de un punto a otro del plano horizontal, o mejor dicho del plano cuya normal es $\breve{g}$ la dirección de la aceleración de la gravedad. A estos planos los denominamos planos equipotenciales, pues todos sus puntos se encuentran a la misma energía potencial (por unidad de volumen).

Pero en la dirección vertical sucede que está actuando el peso:

$$\breve{z})\ p\ dy\ dz - \left(p+\frac{\partial p}{\partial z}dx\right) dy\ dz\ -\ \delta\ g\ dx\ dy\ dz\ = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} + \delta\ g = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\ \delta\ g$$

dicho de otra forma se puede considerar como expresión diferencial del teorema fundamental de la hidrostática: $dp = -\ \delta\ g\ dz$, que en muchos texto aparece en su forma integral o para incrementos de “z” finitos:

$$p_2 - p_1 = -\ \delta\ g\ (z_2 - z_1)$$

[2] Para considerar la variación de presión entre la cara Y=0 e Y=dy del cubo muy pequeño de fluido elegido como sistema bajo estudio, se ha planteado la diferencial de presión considerando la pendiente en forma de derivada parcial es decir suponiendo que cada dirección ortogonal funciona independientemente de las otras, es decir en este caso que varía según la dirección Y.

Podemos apreciar que la presión en el seno de un fluido en equilibrio aumenta en forma proporcional a la profundidad el sentido del crecimiento lo indica la aceleración de la gravedad.

Reiteramos la expresión: $\frac{\partial p}{\partial z} = -\,\delta\ g$

si la escribimos como componente en el versor "z" es el conocido gradiente de presión hidrostática:

$$\frac{\partial p}{\partial z}\check{z} = -\,\delta\ g\ \check{z}$$

Sugerimos repasar el significado de presión relativa y de presión absoluta o leer el Apéndice 1. También la interpretación de presión a partir de la idea de altura de columna de fluido. Es decir en el caso del teorema fundamental de la hidrostática, dividimos miembro a miembro por: $\delta\ g$

$$\frac{p_2 - p_1}{\delta\ g} = -\ \ (z_2 - z_1)$$

Entonces los términos de esta ecuación quedan expresados en unidades de longitud, que son interpretadas como alturas de columna piezométrica, de un fluido de densidad δ.

2_ FLUJO DEL FLUIDO IDEAL

Alguna vez habremos visto el recorrido del agua por el cauce de un río o también la circulación de la sangre por las venas de un ser vivo. El flujo de un fluido ideal es una aproximación que intenta describir las características elementales de la circulación de líquidos, pero considerando despreciables las pérdidas por fricción.
En los fluidos reales dichas pérdidas son mayoritariamente debidas a la viscosidad.
Se desprecia también toda energía que se pudiera emplear en generar la superficie frontera de la porción de fluido líquido con un fluido gaseoso así como también todos los casos de cambio de estado (sólido, líquido, vapor) que pudieran ocurrir debido a las variaciones de presión.
Para estudiar el flujo de un fluido en forma más completa deberíamos leer lo que propusieron al respecto D'Alambert, Froude, Reynolds, Navier, Stokes, Schlichting, Prandtl, Von Karman, etc.

Nosotros limitaremos el encuadre elemental a una parte de las ideas de Euler, Bernoulli y Gauss; aplicadas a fluidos ideales incompresibles (que es un sistema de partículas, pero con características que hablando mal y pronto se parecen al agua pero agua que no moja)

Proponemos, a la manera de Euler, que si una partícula fluida pasa por un tubo, la manera más sencilla de modelizar la dinámica de esa partícula, no es seguir a dicha partícula especifica indicándola con un vector posición (así seguíamos a las partículas en dinámica del punto, que según decimos es el modo que lo hubiera propuesto Lagrange).
Para la estrategia con modalidad euleriana, vamos a controlar la sección de entrada y de salida del tubo que proponemos, este volumen que sometemos a estudio es nuestro volumen de control.

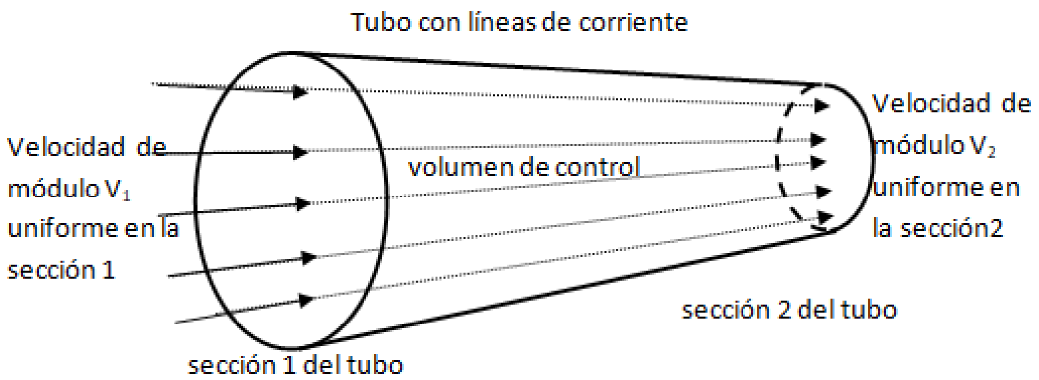

Figura 2

En las condiciones mencionadas cada partícula que pasa por un punto determinado de la sección 1 (de entrada), adquirirá en su recorrido diferentes velocidades hasta alcanzar un punto determinado de la sección 2 (de salida).

Línea de Corriente: vamos a suponer que todas las partículas que accedan por el mismo punto de la sección 1 saldrán por el mismo punto de la sección 2, tal como lo hace la primera partícula, la línea envolvente de las velocidades de las partículas durante su recorrido la denominaremos Línea de Corriente.

Es decir dada una línea de corriente, sabemos que las partículas que están sobre ella tienen velocidades que son tangentes a la dicha línea de corriente.

Esta herramienta establece entre la sección de entrada y la sección de salida una indicación de cómo son las velocidades de las partículas en cada punto dentro del volumen de control. Las propiedades que describen la dinámica de fluidos se conocen a partir de cálculos vectoriales que se realizan sobre líneas de corriente.

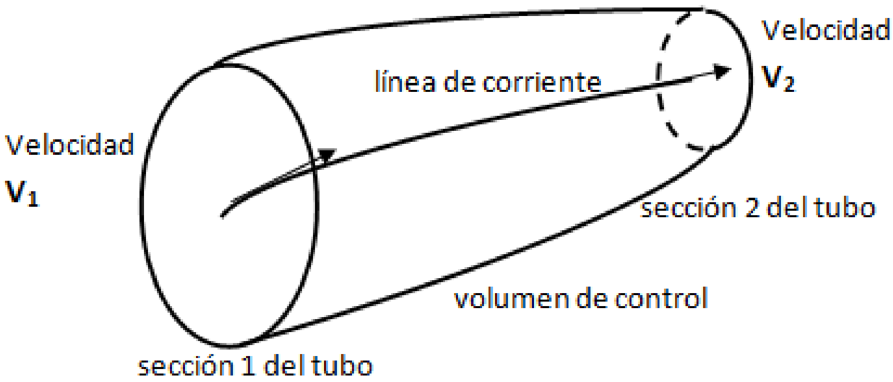

Figura 3

Reiteramos, que cada partícula de fluido que pasa por un punto dado de la sección 1, sigue la línea de corriente que pasa por ese punto hasta la sección 2, donde egresa del volumen de control. Por cada línea de corriente pasan sucesivas partículas, todas poseen esa propiedad referida a que sus vectores velocidad son tangentes a la línea de corriente correspondiente.

Caso elemental del flujo que estudiaremos:

El módulo de la velocidad del fluido o rapidez del fluido en un determinado punto de la línea de corriente puede variar respecto de otro punto de la misma. La variación la vamos a suponer como que puede ser dependiente del tiempo y también depende de cada punto. Es decir que admitimos que es función de la posición y del tiempo.

Un haz de líneas de corriente consideramos que forman u tubo de corriente. El fluido que pasa por un tubo de corriente no sale ni ingres al mismo atravesando ese haz de líneas de corriente, pues hemos dicho que las velocidades sobre cada línea de corriente es tangente a la misma. Si el fluido escapa por los laterales se contradice la definición antedicha.

Entonces el fluido ingresa por la sección 1 y egresa por la sección 2.

- Pesemos la situación teniendo en cuenta la masa del fluido. Veremos que para cada elemento de masa que ingresa por la sección 1, le corresponde el egreso de masa por la sección 2. Decimos esto porque estableceremos que no hay fuentes ni sumideros de fluido dentro del tubo y volumen de control bajo estudio.

- Supongamos que puede verificarse que la rapidez de ingreso (sección 1) cambie en la medida que transcurre el tiempo, en estos casos decimos que el flujo es variable o no estacionario. Si hay variación en función del tiempo de la rapidez en la sección 1, también habrá variación de rapidez en la sección 2 en función del tiempo.
- En el caso que la rapidez de ingreso (egreso) no varíe en función del tiempo decimos que el Flujo es Estacionario.
- Aunque no haya variación de la rapidez en función del tiempo, es decir en régimen estacionario, para cada línea de corriente la velocidad variará punto a punto. Es decir en la línea de corriente, la velocidad pasará de $\mathbf{V_1}$ a $\mathbf{V_2}$. Habrá cambiado en función de la posición. Los cambios dependen de la posición pero no dependen del tiempo. (recordemos que la línea de corriente no es la trayectoria de una partícula sino que es la envolvente de las velocidades de muchas partículas dentro del volumen de control)

En un flujo estacionario hay cambios en la velocidad que dependen del la posición pero no dependen del tiempo.

3_ CAUDAL Y CAUDAL MASICO

(para fluido incompresible)

El caudal es una magnitud física escalar, que representa qué volumen se mueve a través de una determinada sección de un tubo, canal o conducto de fluido por unidad de tiempo. En las próximas páginas estableceremos la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles, la magnitud física que utilizaremos es el caudal, que también se puede escribir como rapidez del fluido multiplicado por el área de la sección normal al tubo considerado. El caudal se menciona en algunos libros como gasto.

Si controlamos el flujo del fluido incompresible a través de una sección determinada, por ejemplo uno de los extremos de nuestro volumen de control, observamos que pasará una determinada cantidad de masa por unidad de tiempo, esta idea coincide con la idea de caudal pero tomando las unidades de masa en lugar de volumen. Dichas unidades están relacionadas por la densidad, que en fluidos incompresibles en constante, independientemente de la presión y velocidad a la cual se establezca el flujo.

Entonces calcularemos Caudal Másico: $\dot{m} = \frac{dm}{dt}$

Es frecuente utilizar la nomenclatura “eme punto” $\dot{m}$ para indicar derivada respecto del parámetro tiempo.

Considerando que la masa es: $dm = \delta\ d_{VOL}$

Podemos relacionar el Caudal: $Q = \frac{d_{VOL}}{dt} \implies \dot{m} = \delta\ Q$

COMENTARIO:

Si considerásemos fuentes bibliográficas y de internet, encontraríamos que el abordaje de los temas de hidrodinámica se realiza mediante tres estrategias, utilizando alguna de ellas según convenga. Las mencionaremos:

1. Metodología integrar o desarrollo a partir de considerar el sistema en estudio como un volumen de control. La herramienta matemática que se utiliza corresponde a planteo con integrales que alcanzan regiones finitas en el espacio.
2. Metodología diferencial o desarrollo a partir de considerar regiones infinitesimales o elementales del fluido. Son como partículas clásicas pero con las características de densidad, viscosidad, estado de la sustancia en estudio. El planteo diferencial no llega a establecer discontinuidades entre moléculas ni cerca.
3. Metodología de estudio de modelos y leyes de semejanza, mediante la utilización de formas de adimensionalización de las leyes fundamentales. Estableciendo correlaciones a partir de experiencias en dispositivos tecnológicos tales como túneles de viento, túneles de cavitación, canales de experiencias de hidrodinámica naval, y otros.

La mayor parte de este artículo, lo desarrollaremos utilizando las metodologías 1 y 2.

4_ TEOREMA DE CONTINUIDAD

Para estudiar este tema lo más eficiente que tenemos es la aplicación a fluidos del teorema de la divergencia de Gauss. Pero todavía no estamos capacitados como para manejar esta ingeniosa herramienta matemática.

Simplificaremos la presentación del tema, considerando flujo unidireccional de fluido ideal incompresible.

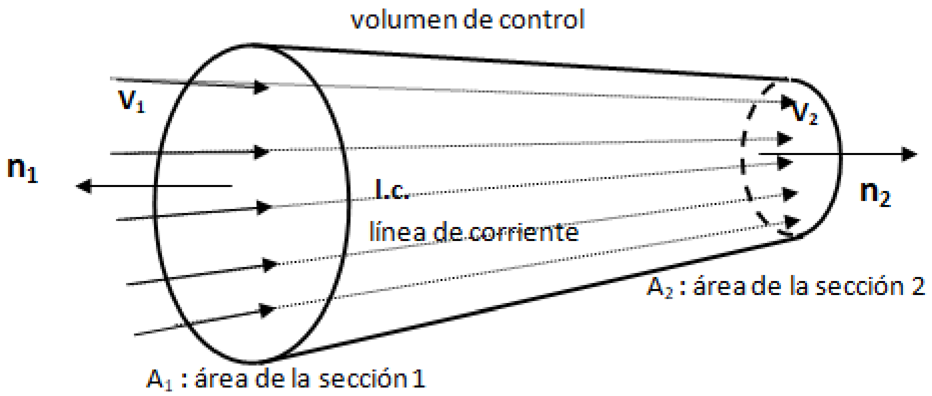

Figura 4

Tomamos la sección 1 cuya normal saliente al tubo de corriente que consideramos en el volumen de control es $\breve{n}_1$, y tomamos la sección 2 cuya normal saliente es $\breve{n}_2$.

El tubo tiene áreas transversales A_1 y A_2. Y respectivamente las velocidades del flujo son $\bar{V}_1 \quad y \ \bar{V}_2$.

Entonces verificamos que para la conservación de la masa (y al ser fluido incompresible también permanece conservado el volumen de dicha masa), se debe verificar:

$$\delta \ \bar{V}_1 \cdot dA_1 \, \breve{n}_1 + \delta \ \bar{V}_2 \cdot dA_2 \, \breve{n}_2 = 0$$

La interpretación física de la ecuación anterior es flujo de masa que ingresa más flujo de masa que egresa suma cero.

El producto escalar entre velocidades y normales salientes por los diferenciales de área correspondientes son los flujos que ingresan y egresan respectivamente.

Al ser fluido incompresible se puede eliminar la densidad ya que permanece constante durante el recorrido del tubo de corriente.

$$\bar{V}_1 \cdot dA_1 \, \breve{n}_1 + \ \bar{V}_2 \cdot dA_2 \, \breve{n}_2 = 0$$

Entonces la interpretación es la suma del caudal que ingresa y egresa es nula. Entonces si hacemos los productos escalares y extendemos (integramos) a toda el área de las secciones 1 y 2 respectivamente:

$$-\, v_1 A_1 + \ v_2 A_2 \ = 0$$

Cada término expresa el producto rapidez por área, que es el caudal, de cada sección respectivamente. (Gauss nos haría pensar en que el flujo de la velocidad a través del área que encierra el volumen de control es cero)

$$v_1 A_1 = \ v_2 A_2 \quad \Longrightarrow \ Q_1 = \ Q_2$$

Como hemos considerado fluidos ideales, la rapidez para todas las líneas de corriente en una determinada sección es uniforme. Y en todos los casos se supone que la pared lateral del tubo no permite filtraciones, tampoco hay fuentes ni sumideros de fluido dentro del volumen de control.

El párrafo siguiente podemos titularlo:

"Primera Ecuación Universal de los Sistemas de Partículas, aplicada a fluidos ideales incompresibles para flujo unidireccional y además estacionario". Pero es más conocido denominarlo*: "Ecuación de Euler para fluidos ideales (reducida a flujos unidireccionales y estacionarios)"*

Un flujo está en régimen estacionario, si la velocidad de la partícula que pasa por un determinado punto no varía en función del tiempo. Es decir en un punto la velocidad de pasaje de una partícula tras otra es constante en función del tiempo. Pero si pasamos dentro del volumen de control de una sección a otra la velocidad puede variar.

Pregunta: ¿si el flujo es estacionario, es posible que las partículas fluidas se aceleren?

El flujo en régimen estacionario simplifica el cálculo de la aceleración, pues la derivada parcial de la velocidad respecto del tiempo es nula[3], pero debemos considerar efectivamente que hay cambios de velocidad en la medida que la partícula escurre de la sección de ingreso a la sección de egreso de nuestro volumen de control.

Tenemos que agudizar la observación para distinguir entre derivada total de la velocidad o derivada material de la velocidad respecto del tiempo y derivada parcial de la velocidad respecto del tiempo. Lo haremos para una sola dirección de movimiento a lo largo del tubo que nos servirá de volumen de control.

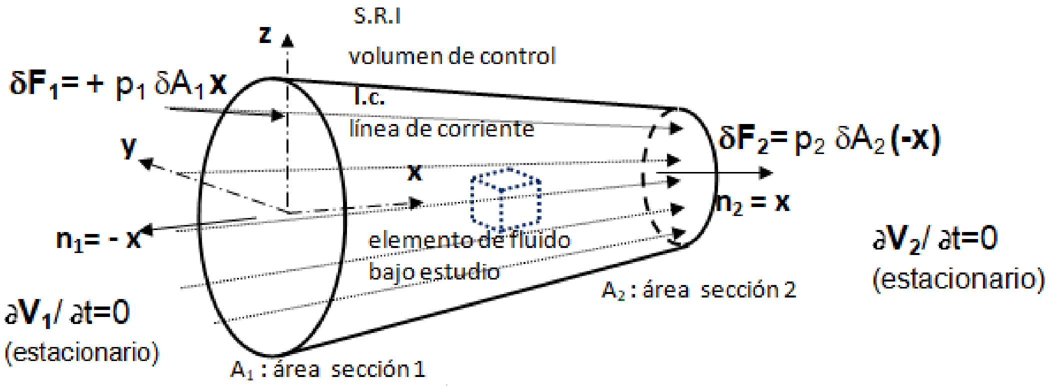

Figura 5

[3] Derivada parcial respecto del tiempo significa, que si la velocidad se supone que es función de tiempo y de la posición x, derivamos solamente respecto del tiempo y consideramos a x como si fuese constante.

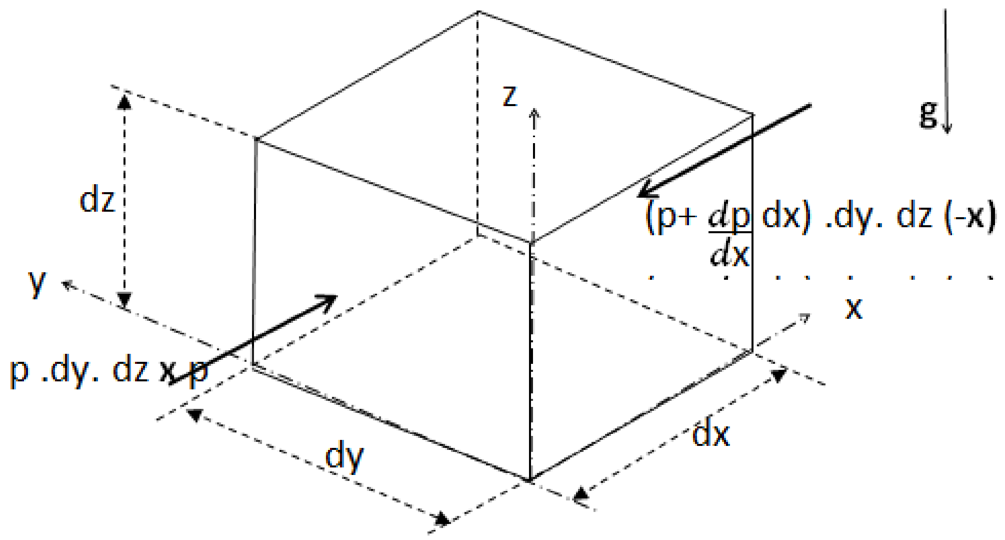

Figura 6

Entonces como se indica en la figura:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = 0 \overset{en\ A1}{\Longleftarrow} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = 0 \overset{en\ A2}{\Longleftarrow}$$

Como en el caso unidireccional: $\bar{V} = f[x\,(t), t] \;\; \Longrightarrow \;\; \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial t}$

Entonces la aceleración para el caso estacionario es:

$$\bar{a}_x \;=\; \frac{d\bar{V}}{dt} = 0 + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \cdot \bar{V}_x\, \check{x}$$

Esta aceleración que "sobrevive" la denominaremos aceleración convectiva.

Para aplicar la primera ecuación universal al elemento de fluido bajo estudio, tenemos que considerar las fuerzas aplicadas a la caras elementales en a dirección "x", que estarán referidas a fuerzas de superficie. Es decir presión en la superficie elemental "dy dz" en x=0 y en x=dx, según nuestro dibujo.

En principio supongamos que el tubo que rodea el volumen de control aplica una fuerza compensada sobre el fluido. (Esta suposición para el caso general no es totalmente cierta, porque el tubo conduce al fluido y logra cambiar su cantidad de movimiento, pero esta problemática no es de interés para el alcance de este artículo, lo dejaremos para un estudio más avanzado)

Nos ocuparemos de las interacciones que se establecen entre el elemento bajo estudio y el resto del fluido que se encuentra a izquierda de la sección 1 y a la derecha de la sección 2.

Ahora hagamos la suma de las fuerzas exteriores sobre nuestro elemento fluido bajo estudio y la fuerza neta resultante será igual a la masa por la aceleración del centro de masa del elemento bajo estudio.

$$\sum \bar{F}^{EXT} = m \frac{d\bar{V}}{dt}$$

La masa la calculamos a partir de la densidad y la aceleración según lo expresado en el párrafo anterior, pero como estamos en condiciones unidireccionales utilizaremos simbología de derivadas ordinarias.

Para evaluar las fuerzas veamos el diagrama de cuerpo libre, del cubo elemental bajo estudio de la figura anterior.

$$p\, dy\, dz - \left(p + \frac{dp}{dx}\, dx\right) dy\, dz = \ \delta\, dx\, dy\, dz\, V_x\, \frac{dV_x}{dx}$$

Recordamos que estamos considerando flujo unidireccional, entonces vamos a abusar de la nomenclatura y eliminaremos los subíndices “x” de aquí en más.

Operamos la suma en el miembro de la izquierda:

$$-\frac{dp}{dx}\, dxdy\, dz = \ \delta\, dx\, dy\, dz\, V\, \frac{dV}{dx}$$

Los siguientes pasos se hacen por unidad de volumen:

$$-\frac{dp}{dx} \ = \ \delta \ V \ \frac{dV}{dx}$$

$$-\,dp \ = \ \delta \ V\, dV$$

Forma diferencial de la Ecuación de Euler, para fluido ideal incompresible, considerando flujo unidireccional y estacionario.

La interpretación de esta ecuación pone en evidencia que en una línea de corriente las variaciones de velocidad se relacionan dinámicamente con los cambios de presión. Podemos decir entonces que <u>un incremento en la velocidad es debido a un descenso en la presión</u>.

Esta relación es el resumen de la primera ecuación universal aplicada a este volumen de control, y aunque parezca extraño en régimen estacionario hay aceleración dentro del recorrido de la línea de corriente por el volumen de control. Es decir hay un cambio de cantidad movimiento que se debe a la acción de fuerzas se superficie originadas por la diferencia de presión entre los extremos "1" y "2" del volumen de control.

Vamos a detallar más qué presión debemos considerar.

Es decir vamos a considerar la presión con los dos términos de la presión hidrostática que fueron mencionados en el teorema fundamental de la hidrostática, para que de esa manera se tenga en cuenta la acción de la gravitación también.

$$p_2 - p_1 = -\,\delta\, g\,(z_2 - z_1)$$

O también si consideramos un plano horizontal de referencia para la altura $z_1 = 0$:

$$p_2 = p_1 + \delta\, g\, z_2$$

Por ejemplo analicemos la siguiente situación:

Tubería cilíndrica horizontal de diámetro D_1 con boquilla más fina de diámetro D_2, algo similar a las que se utilizan para regar jardines. Se sabe que circula un caudal Q.

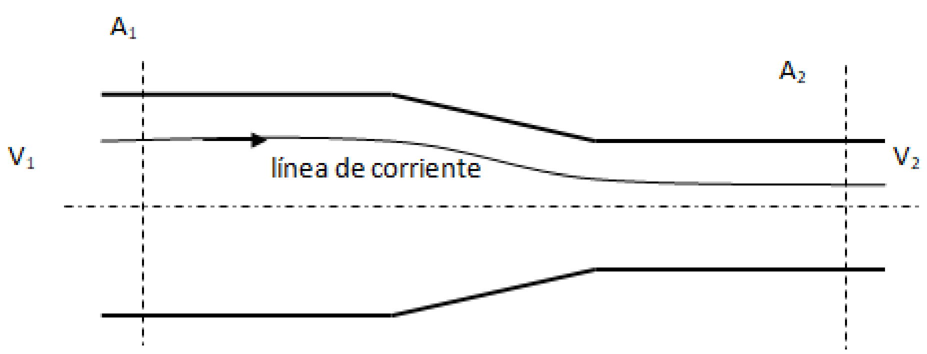

Figura 7

Si tenemos en cuenta la ecuación de continuidad:

$Q = v_1\, A_1 = \; v_2\, A_2 \qquad si\;\; A_1 > \; A_2 \qquad \Longrightarrow \quad v_1 < \; v_2$

Con lo cual verificamos que dV es positivo.

Entonces la ecuación de Euler nos permite concluir que dp es negativo, entonces:

$p_1 > \; p_2$

La conclusión que obtenemos es correcta para la línea de corriente dentro del volumen de control entre las secciones "1" y "2". Pero esta situación no es para nada intuitiva, pues es muy común escuchar en la conversación diaria que hay mucha presión cuando se quiere significar que el agua sale muy rápido por el pico regador. No deberíamos decir esta frase así si conversáramos entre profesionales de ingeniería.

5_ INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN DE EULER

(caso unidireccional elemental que es el alcance de este artículo)

Ecuación de Bernoulli

A partir de la ecuación de Euler, vamos a integrar entre las secciones "1" y "2"

$$- \int_{p_1}^{p_2} dp \; = \; \delta \int_{V_1}^{V_2} V \;\; dV$$

$$- \int_{p_1}^{p_2} dp \; = \; \delta \int_{V_1}^{V_2} V \;\; dV$$

$$-(p_2 - p_1) = -\,\delta \;\left(\frac{{V_2}^2}{2} - \frac{{V_1}^2}{2} \right)$$

Pero teniendo en cuenta que:

$$p_2 - p_1 = -\,\delta\, g\, (z_2 - z_1)$$

$$p_1 + \delta\, g\, z_1 + \; \delta\; \frac{{V_1}^2}{2} = p_2 + \delta\, g\, z_2 + \; \delta\; \frac{{V_2}^2}{2} = cte$$

Esta última expresión es la Ecuación de Bernoulli, que para fluidos ideales representa la conservación de la energía por unidad de volumen en cada punto del volumen de control.

La expresión se mide en unidades de presión y el dibujo siguiente intenta dar la descripción física de sus términos.

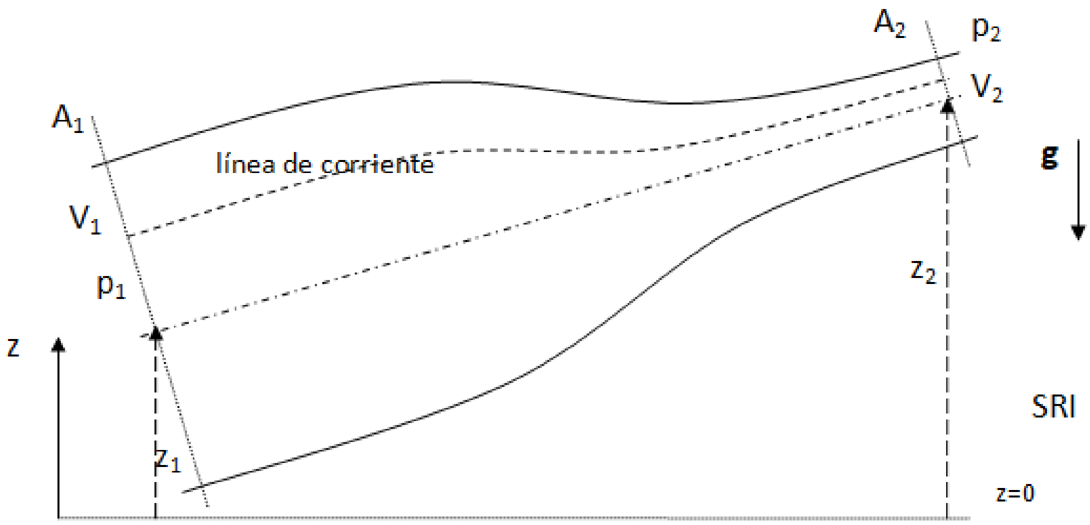

Figura 8

En las aplicaciones técnicas de la ecuación de Bernoulli es muy frecuente medir los términos en altura de columna de fluido. ¿Qué es esto?

Dividamos los miembros de la ecuación anterior por el producto $\delta\, g$ es decir por el peso específico del fluido.

$$\frac{p_1}{\delta\, g} + z_1 + \frac{{V_1}^2}{2\, g} = \frac{p_2}{\delta\, g} + z_2 + \frac{{V_2}^2}{2\, g} = cte$$

Para representar físicamente estos términos, recurrimos a un dibujo en el cual incorporamos tubos piezométricos con la indicación de cada término de altura de columna de fluido.

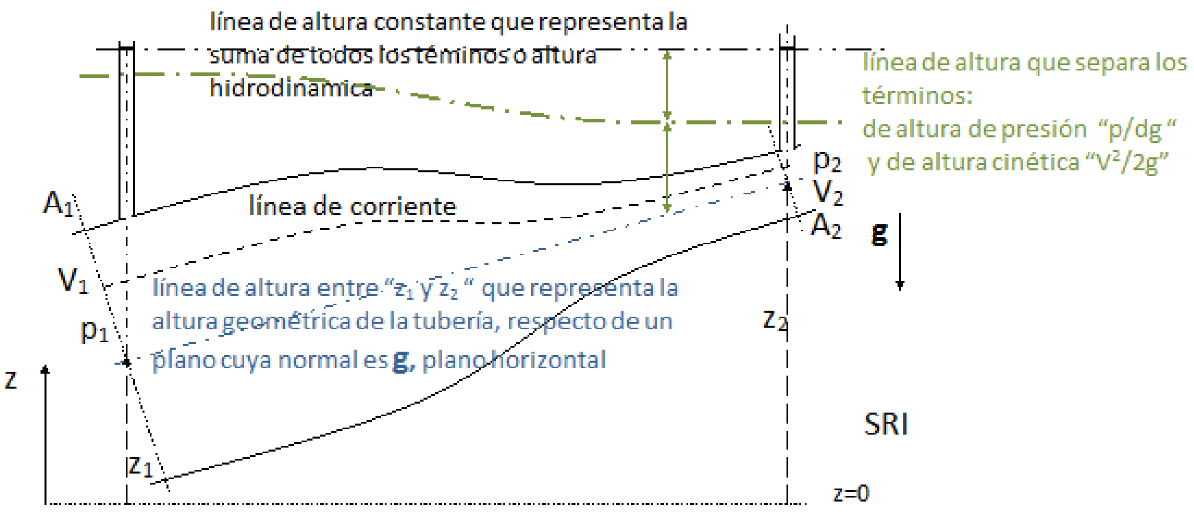

Figura 9

Proponemos el siguiente ejemplo que se refiere al tubo de Pitot, y nos servirá de base para orientar la construcción de los conceptos de altura de presión piezométrica y de altura cinetica del flujo.

6_TUBO DE PITOT

El tubo de Pitot es utilizado para medir velocidades de aviones y barcos, también para tuberías que conducen fluidos en todas la plantas industriales y en aire acondicionado.

Veamos un ejemplo:

Enunciado: supongamos un caño cilíndrico por el cual circula un fluido ideal incompresible, se instala tubos que cumple las funciones de medir la altura piezométrica y la altura total hidrodinámica, similar a la configuración de un tubo de Pitot (ver figura 10) . Se desea conocer la presión relativa dentro del caño cilíndrico, la altura cinética y determinar el valor de la velocidad a partir de la lectura de las alturas de columna de fluido de los tubos.

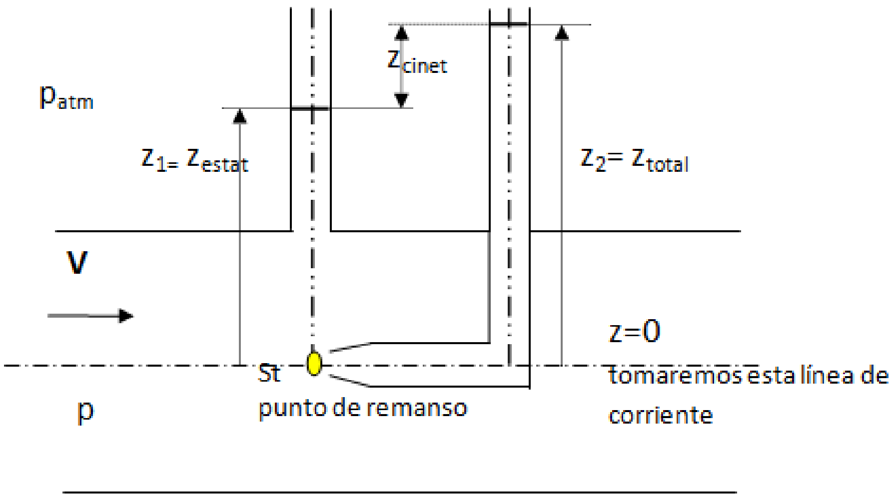

Figura 10

En nuestro ejercicio supondremos que la tubería tiene diámetro mucho mayor que el diámetro del tubo de medición. Es decir no se afecta la velocidad pues el cambio de sección producido por el tubo de medición es despreciable.

Se ha señalado en la figura el punto de remanso, también conocido como punto de estancamiento o en inglés *stagnation point.*

La línea de corriente que consideramos pasa por el punto de remanso. Y que la presión que se da como dato es presión relativa. (en el caso que desarrollamos no es relevante, en las conclusiones del ejercicio lo mostraremos)

$$p + \frac{1}{2}\,\delta\, V^2 = \,p_{St}$$

También si consideramos el tubo vertical de medición conectado a ese punto, se establecerá la altura z_2:

$$\delta\; g\; z_2 = \,p_{St}$$

Por otra parte el tubo de medición de la izquierda, mide la presión relativa hidrostática.

$$\delta\; g\; z_1 = \,p$$

Por lo tanto para medir velocidad se puede medir la diferencia de altura de columna de ambos tubos:

$$p\ g\ z_1 + \frac{1}{2}\ \delta\ V^2 = \ p\ g\ z_2$$

$$\frac{1}{2\ g}\ V^2 = \ z_2 - \ z_1 = z_{cinetica}$$

$$V = \ \sqrt{2\ g\ (z_2 - \ z_1)}$$

Como conclusión veamos qué resultado se obtiene si la presión que se dio como dato hubiese sido presión absoluta:

$$p + \frac{1}{2}\ \delta\ V^2 = \ p_{St}$$

$$\delta\ g\ z_2 + p_{atm} = \ p_{St}$$

$$\delta\ g\ z_1 + p_{atm} = \ p$$

Que como podemos verificar al despejar V, se llegará al mismo resultado.

Nota tecnológica: si al sistema de medición que propone el tubo de Pitot, lo instalamos en un avión, hay que prevenir que no se congele alguno de los orificios que se comunican con la presión atmosférica, pues en esa situación la medición de velocidad será errónea y los sistemas automáticos de control de la nave fallarán. Hubo varios accidentes aéreos muy graves que se originaron en este tipo de falla.

7_APÉNDICE

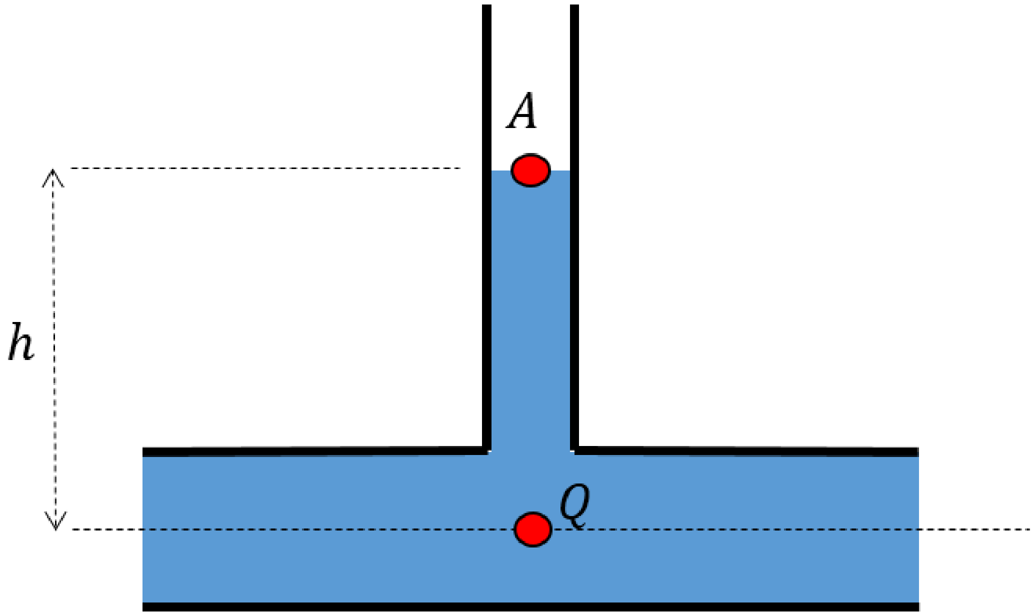

Figura 11

P_{abs} : *presión absoluta o real*

P_{rel} : *presión relativa o manométrica*

En el punto Q la presión absoluta es:

$$P_{abs} = P_A + P_{rel} = P_{atm} + \rho g h$$

La presión relativa es:

$$P_{rel} = \rho g h$$

Podemos calcular la altura de la columna del fluido como:

$$h = \frac{P_{abs} - P_{rel}}{\rho g}$$

Presión absoluta o real (P_{abs}): llamamos presión absoluta o real a la suma de la presión atmosférica más la presión que genera la altura de la columna del fluido.

Presión relativa o manométrica (P_{rel}): llamamos presión relativa o manométrica a la diferencia entre la presión absoluta y la presión atmosférica.